Université Internationale de Casablanca

CPI2 : ALGÈBRE 3, 2016-2017.
TD2

Pr. H. EL AMRI

Exercice 0.0.1. *Soit E l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.*

1. *Montrer que l'application*

$$\left\{\begin{array}{l} f : E \longrightarrow E \\ \quad u \longrightarrow u' \end{array}\right. \tag{1}$$

est un endomorphisme de E.

2. *Montrer que l'application*

$$\left\{\begin{array}{l} f : E \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad u \longrightarrow u(0) \end{array}\right. \tag{2}$$

est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

3. *Montrer que l'application*

$$\left\{\begin{array}{l} f : E \longrightarrow E \\ \quad u \longrightarrow f(u) \quad , \quad avec \quad f(u)(x) = \int_0^x u(t)dt \end{array}\right. \tag{3}$$

est un endomorphisme de E.

4. *Montrer que l'application*

$$\left\{\begin{array}{l} f : E \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad u \longrightarrow \int_0^1 u(t)dt \end{array}\right. \tag{4}$$

est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

Exercice 0.0.2. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit*

$$f : E \longrightarrow F$$

une application linéaire de E dans F.

1. *Montrer que $f(0_E) = 0_F$*
2. *Montrer que si A est un sous espace vectoriel de E alors $f(A)$ est un sous espace vectoriel de F.*
3. *Montrer que si B est un sous espace vectoriel de F alors $f^{-1}(B)$ est un sous espace vectoriel de E.*
4. *Montrer que f est injective si et seulement si $Kerf = \{0\}$*
5. *Montrer que f est surjective si et seulement si $Imf = F$*
6. *Montrer que si E et F sont de même dimension, alors on a les équivalences suivantes :*
   (f injective) $\Leftrightarrow$ (f surjective) $\Leftrightarrow$ $Kerf = \{0\} \Leftrightarrow Imf = F$.

RAPPEL

$$dimE = dimKerf + rg(f)$$

Exercice 0.0.3. *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E vérifiant*

$$f^n = 0 \quad et \quad f^{n-1} \neq 0$$

où pour tout $x \in E$

$$\begin{cases} f^0(x) = x \\ f^1(x) = f(x) \\ f^k(x) = f\left(f^{k-1}(x)\right) \quad \forall k \geq 1 \end{cases} \tag{5}$$

Soit $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$. Montrer que le système

$$(a, f(a), fof(a), f^3(a), ..., f^{n-1}(a))$$

est une base de E.

Solution

Montrons que le système est libre. Soient $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ des réels tels que

$$\lambda_0 a + \lambda_1 f(a) + ... + \lambda_{n-1} f^{n-1}(a) = 0$$

On prend f^{n-1} à gauche et à droite, on obtient

$$\lambda_0 f^{n-1}(a) + 0 + 0 + ... + 0 = 0$$

Ceci puisque les autres termes sont de la forme $f^{n+k}(a)$ donc nuls. Par exemple

$$f^n(a) = 0 \quad , \quad f^{n+1}(a) = f(f^n(a)) = f(0) = 0$$

On en déduit que $\lambda_0 = 0$. On repart de

$$\lambda_1 f(a) + ... + \lambda_{n-1} f^{n-1}(a) = 0$$

et on applique f^{n-2} à gauche et à droite, on obtient $\lambda_1 f^{n-1}(a) = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$. Ainsi de suite jusqu'à $n-1$. Comme le système est libre et contient n vecteurs alors il engendre un sous espace vectoriel de E de dimension n (c'est la dimension de E). Ce système engendre donc E tout entier. D'où le système $(a, f(a), fof(a), f^3(a), ..., f^{n-1}(a))$ est une base de E.

Exercice 0.0.4. *Soit E un espace vectoriel et E_1, E_2 deux sous espaces vectoriels de dimension finie de E. Soit f l'application définie par*

$$\begin{cases} f : E_1 \times E_2 \longrightarrow E \\ \qquad (x_1, x_2) \longrightarrow x_1 + x_2 \end{cases} \tag{6}$$

1. *Montrer que f est linéaire*
2. *Déterminer le noyau de f ; $(Kerf)$*
3. *Déterminer l'image de f ; (Imf)*
4. *Que donne le théorème du rang.*

Solution

1. F est linéaire : Soit $x, y \in E_1 \times E_2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$ avec $x_1, y_1 \in E_1$ et $x_2, y_2 \in E_2$

$$\alpha X + \beta Y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)$$

$$f(\alpha X + \beta Y) = \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \beta y_1 + \beta y_2$$
$$\alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$$

2. $x \in Kerf \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \;\; et \;\; x_1 + x_2 = 0$ Donc $X \in Kerf \Leftrightarrow X = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \;\; et \;\; x_2 = -x_1$ Comme E_1 et E_2 sont des sous espaces vectoriels alors $X \in Kerf \Leftrightarrow X = (x, -x) \;\; avec \;\; x \in E_1 \cap E_2$
$$Kerf = \{(x, -x), x \in E_1 \cap E_2\}$$
Remarque : Si $(x, y) \in Kerf$ alors $y = -x$ et donc $(x \in E_1, \;\; et \;\; y = -x \in E_1$, c'est à dire que $x, y \in E_1 \cap E_2$
Si $x \in E_1 \cap E_2$ alors $(x, -x) \in Kerf$ On peut dire que l'application
$$\begin{cases} g : E_1 \cap E_2 \longrightarrow Kerf \\ \quad x \longrightarrow (x, -x) \end{cases} \tag{7}$$
est une application linéaire bijective (isomorphisme). Ce qui fait donc que $Kerf$ et $E_1 \cap E_2$ sont deux sous espaces de même dimension.
$$dimKerf = dim(E_1 \cap E_2)$$

3. $$y \in Imf \Leftrightarrow \exists x_1 \in E_1, \exists x_2 \in E_2 \;\; tels \;\; que \;\; y = x_1 + x_2$$
C'est à dire que
$$Imf = E_1 + E_2$$
Donc
$$dimImf = dim(E_1 + E_2)$$

4. Le théorème du rang dit que :
$$dim(E_1 \times E_2) = dimKerf + dimImf$$
Donc
$$dimE_1 + dimE_2 = dim(E_1 \cap E_2) + dim(E_1 + E_2)$$
c'est à dire
$$dim(E_1 + E_2) = dimE_1 + dimE_2 - dim(E_1 \cap E_2)$$

Exercice 0.0.5. *Soit g définie par*
$$\begin{cases} g : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \quad (x_1, x_2, x_3) & \longrightarrow & (x_1 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_3) \end{cases} \tag{8}$$
g est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 0.0.6. *Soit g définie par*
$$\begin{cases} g : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \quad (x_1, x_2, x_3) & \longrightarrow & (x_1 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2) \end{cases} \tag{9}$$
g est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 0.0.7. *Soit f définie par*
$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad (x_1, x_2) & \longrightarrow & x_1 \end{cases} \tag{10}$$

1. *Déterminer $Kerf$*
2. *Déterminer Imf*
3. *Écrire l'égalité du rang*

4. *f est-elle injective, surjective, bijective ?*

Exercice 0.0.8. *Soit f définie par*

$$\left\{\begin{array}{lll} f:\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \quad (x_1,x_2,x_3) & \longrightarrow & (x_1+x_2, x_1-x_2) \end{array}\right. \tag{11}$$

1. *Déterminer $Kerf$*
2. *Déterminer Imf*
3. *Écrire la l'égalité du rang*
4. *f est-elle injective, surjective, bijective ?*

Exercice 0.0.9. *Tout espace vectoriel de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.*